Fach	**Mathematik**
Klasse(n)	**alle 4. Klassen im Schuljahr 2021/2022**

Dauer der Prüfung:	4 Std.
Erlaubte Hilfsmittel:	Grafik-Taschenrechner TI-84 Plus CE-T und Formelsammlung «Fundamentum»

Vorbemerkungen:

- Die Lösungswege sind nachvollziehbar anzugeben.

  Ergebnisse ohne Begründung können mit 0 Punkten bewertet werden.

  Geben Sie alle Lösungen wenn möglich exakt, sonst, und wenn nicht anders angegeben, auf zwei Nachkommastellen gerundet an.
- Jede Aufgabe muss auf ein separates Blatt gelöst werden.

  Teilaufgaben sind deutlich zu nummerieren.
- Es können maximal 61 Punkte erreicht werden. Die ungerundete Note 6 wird für 52 Punkte erteilt.

  Damit errechnet sich die Note nach der Formel: $\text{Note} = \frac{\text{Erreichte Punkte}}{52} \cdot 5 + 1$

Viel Erfolg wünschen Barbara Fankhauser, Michaela Heinis,
Markus Maurer, Philippe Meili, und Dennis Weber!

Aufgabe:	1	2	3	4	5	Summe	Note
Punkte:	15,5	12	12	10	11,5	61	
Erreicht:							

1) Vektorgeometrie — Total 15,5 P.

a) Stellen Sie eine Parametergleichung der Geraden g durch die Punkte A(–2 / 1 / –2) und B(1 / –5 / 4) auf. (1)

b) In welchem Punkt und unter welchem Winkel schneidet die Gerade g die xy-Ebene? (2,5)

c) Bestimmen Sie den Punkt C auf der x-Achse, so dass das Dreieck ABC bei Eckpunkt B einen rechten Winkel hat. (2)

d) Bestimmen Sie den Punkt D auf der x-Achse, so dass der Flächeninhalt des Dreiecks ABD minimal wird. (3)

e) Des Weiteren ist der Punkt Q(–8 / –2 / 9) gegeben. Stellen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E_1 auf, die diesen Punkt Q enthält und zudem senkrecht zur Geraden g steht. (1,5)

Für die folgenden Teilaufgaben ist die Ebene E_2: $x - 2y + 2z - 15 = 0$ gegeben.

f) Wie gross ist der Abstand dieser Ebene E_2 zum Ursprung? (1)

g) Welcher Punkt der Ebene E_2 ist derjenige, der minimalen Abstand zum Punkt P(1 / 5 / 3) aufweist? Wie gross ist dieser Abstand? (3)

h) Prüfen Sie, ob die Gerade (1.5)

$$h: \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

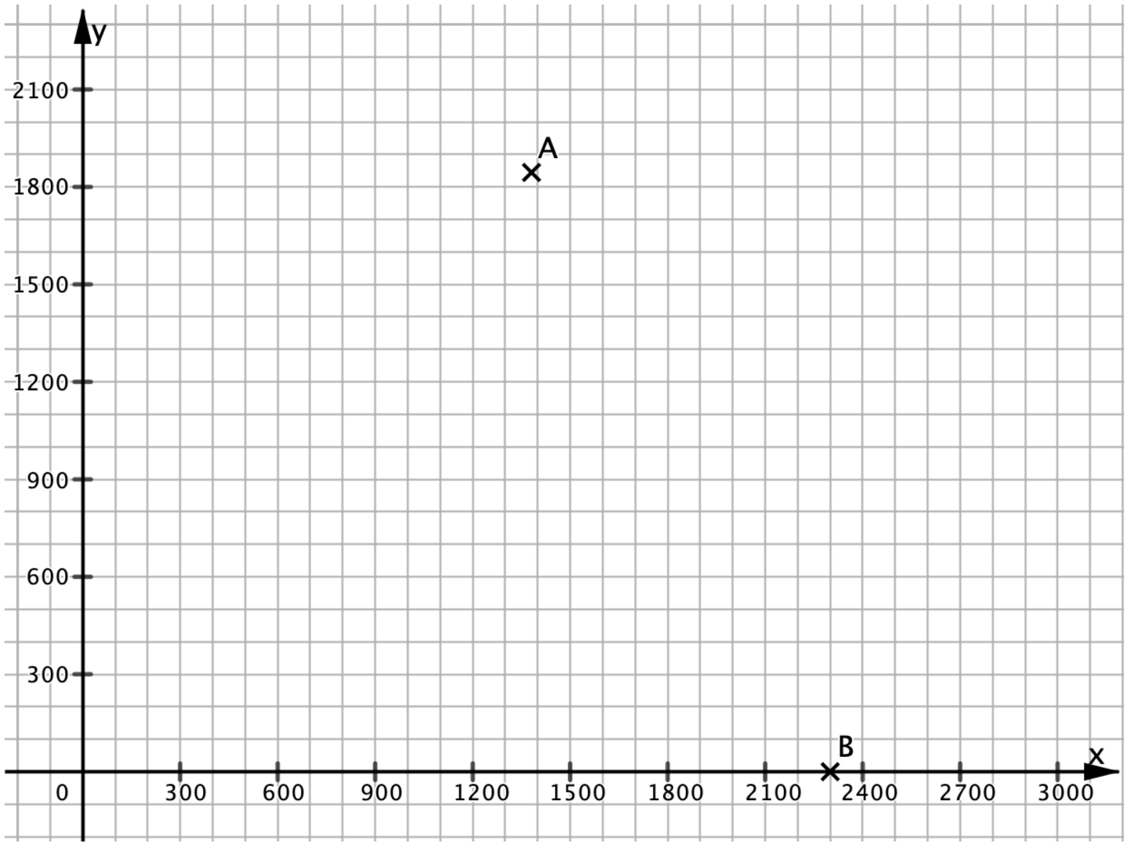
in der Ebene E_2 liegt.

2) Differentialrechnung **Total 12 P.**

Das Höhenprofil eines steilen Berges sei durch die Funktion

$$f(x) = 2x \cdot \sin\left(\frac{\pi}{1800}x\right)$$

gegeben. Die x- und y-Werte sind in Metern angegeben.



a) Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f(x) ins vorgegebene Koordinatensystem für $0 \leq x \leq 1800$. Zeichnen Sie dazu alle $\Delta x = 300$ jeweils die Höhe des Berges an dieser Stelle ein. (2)

b) Geben Sie die erste Ableitung der Funktion f(x) an. (1)

c) Bestimmen Sie die Koordinaten des Berggipfels S. (0,5)

d) Vom Ort A(1381 / y) am Hang des Berges bis zum Ort B(2300 / 0) im Tal führt eine Seilbahn. Das Tragseil ist perfekt gespannt, deshalb kann es vereinfacht als Gerade beschrieben werden.
Wie lange muss ein Tragseil sein? (1,5)

e) Das Seilbahnunternehmen bietet auch Bungee-Sprünge an der Stelle x = 1600 aus der Seilbahn an. Wie lange darf in diesem Fall das entspannte Bungee-Seil maximal sein, wenn das entspannte Bungee-Seil einen vertikalen Sicherheitsabstand von 100m zum Boden haben soll, damit die Wagemutigen bei der Ausdehnung des Bungee-Seils den Boden nicht berühren? (3)

Fortsetzung Aufgabe 2: Differentialrechnung

f) Am Ort G(1400 / 500) im Berg wurde von Geologen eine Kristallhöhle entdeckt. Von welchem Ort am Hang des Berges aus müsste man einen Tunnel graben, damit dieser minimale Länge aufweist? (2)

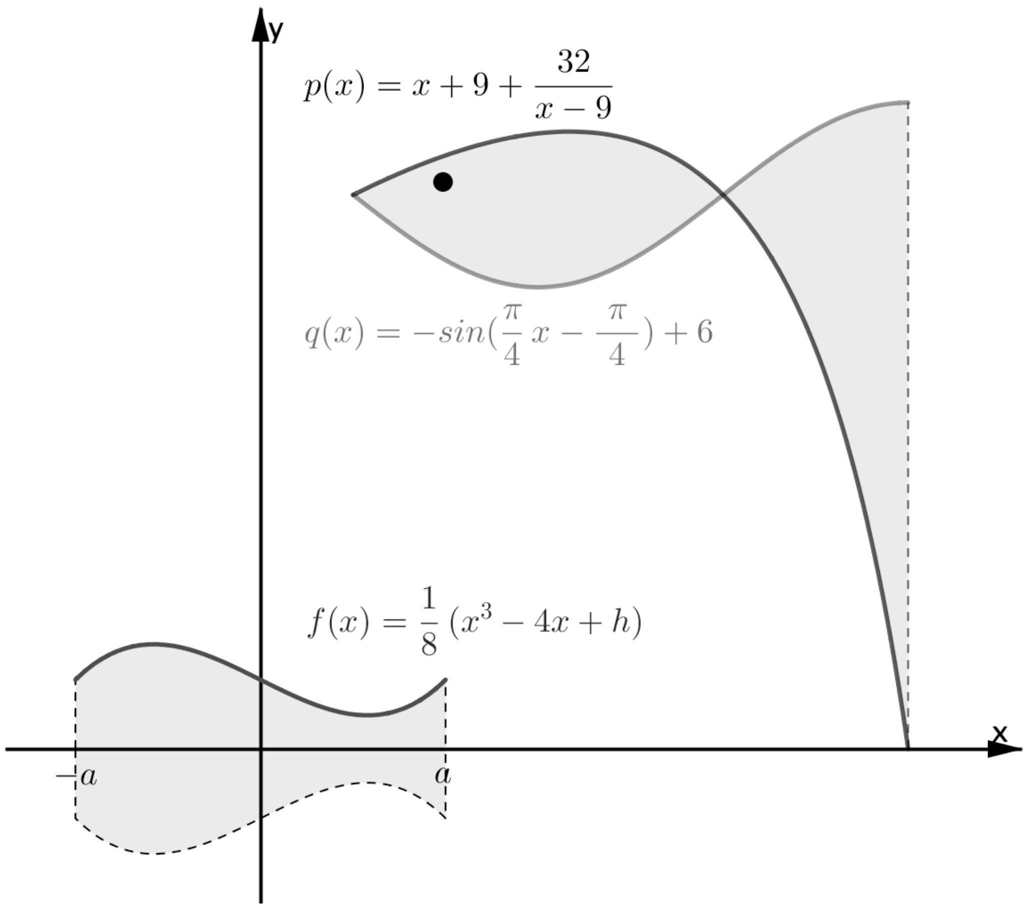
g) Der Tunnelbauer will jedoch auf Grund geologischer Gegebenheiten einen anderen Tunnel bauen. Dieser soll im Ursprung starten und in G enden und dabei dem Weg, der durch den Graphen der Funktion (2)

$$g(x) = e^{bx} + a$$

beschrieben wird, folgen. Berechnen Sie die Parameter a und b. Runden Sie b bitte auf vier Stellen nach dem Komma.

3) Integralrechnung **Total 12 P.**

In einem Aquarium, auf dessen Boden eine Amphore liegt, schwimmt ein Fisch.



Teil A: Die Amphore

Durch eine Rotation der Funktion $f(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 4x + h)$ im Intervall [–a, a] um die x-Achse entsteht eine Amphore.

a) Es ist a = 2 und h = 6.

  i) Bestimmen Sie das Rotationsvolumen der Amphore mit Hilfe des Taschenrechners. (1)

  ii) Berechnen Sie den Querschnittsflächeninhalt der Amphore von Hand. (2)

b) Der Querschnittsflächeninhalt der Amphore sei nun 5,4.

  i) Berechnen Sie h, wenn a = 2 ist, von Hand. (2)

  ii) Berechnen Sie a, wenn h = 6 ist, von Hand. (2)

Fortsetzung Aufgabe 3: Integralrechnung

Teil B: Der Fisch

Durch die beiden Funktionen $p(x) = x + 9 + \frac{32}{x-9}$ und $q(x) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}x - \frac{\pi}{4}\right) + 6$ entsteht ein Fisch.

c) Berechnen Sie die Stammfunktionen der Funktionen $p(x)$ und $q(x)$ von Hand. (2)

d) Bestimmen Sie den Querschnittsflächeninhalt des Fisches mit Hilfe des Taschenrechners. (3)

4) Stochastik

Total 10 P.

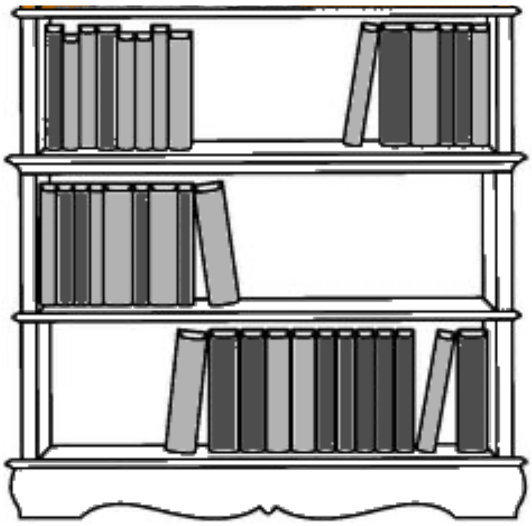
Teil A: Die Bibliothek

Ira besitzt eine Bibliothek mit insgesamt 35 Büchern (18 rote, 17 blaue), will etwas lesen, aber kann sich nicht für ein Buch entscheiden:

Regalbrett A, 14 Bücher: 9 rote, 5 blaue.

Regalbrett B, 9 Bücher: 5 rote, 4 blaue.

Regalbrett C, 12 Bücher: 4 rote, 8 blaue.



a) Ira will lesen und wählt eines der Bücher zufällig aus. Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich… (1)

   i) …um ein rotes Buch handelt.

   ii) …um ein rotes Buch handelt, wenn klar ist, dass es aus Regalbrett B stammt?

b) Von den 35 Büchern der Bibliothek sind 26 Romane, der Rest sind Sachbücher. 23 aller Bücher sind auf deutsch geschrieben, der Rest auf englisch. 21 der Romane sind auf deutsch. (2)

   i) Wie viele der Bücher sind Sachbücher und auf englisch?

   ii) Wie viele der Bücher sind Sachbücher oder auf englisch?

c) Ira will immer noch lesen und wählt nun zunächst eines der drei Regalbretter durch Würfelwurf mit einem fairen, Würfel aus. Bei Augenzahl 1 wählt er Regalbrett A, bei Augenzahl 2 oder 3 Regalbrett B, sonst Regalbrett C. Danach zieht Ira zufällig ein Buch aus dem gewählten Regalbrett. (3)

   i) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Buch blau ist?

   ii) Angenommen, das gezogene Buch ist blau. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das Buch aus Regalbrett A stammt?

Fortsetzung Aufgabe 4: Stochastik

Teil B: Der Gesangswettbewerb

Für einen jährlich stattfindenden Gesangswettbewerb haben sich 328 Flamingos angemeldet. In den Anmeldebedingungen steht zwar, dass man sich angemessen mit Frack und Zylinderhut zu kleiden habe. Die Erfahrung zeigt aber, dass durchschnittlich 23% der Flamingos ohne Zylinderhut zum Wettbewerb erscheinen.

d) Welcher Wahrscheinlichkeitsverteilung folgt die Zufallsvariable X «Flamingos ohne Zylinderhut»? Begründen Sie. (1)

e) Berechnen Sie die Standardabweichung σ der Zufallsvariablen X. (0,5)

f) Das Wettbewerbskomitee hält 80 Reservezylinderhüte bereit. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass diese Reservezylinderhüte ausreichen. (0,5)

g) Als der Wettbewerb beginnt, haben nur 69 Flamingos keinen Zylinderhut dabei. (2)

Der Pinguin sagt: «Dieses Jahr haben mehr Flamingos einen eigenen Zylinderhut. Das liegt an unserer Frühlings-Verkaufsaktion im letzten Jahr!»

Das Wildschwein sagt: «Die Flamingos sind so schlecht gekleidet wie immer. Wir hatten einfach Glück.»

Formulieren Sie die zu überprüfenden Hypothesen mathematisch. Entscheiden Sie mittels Rechnung und im Vergleich zu üblichen Signifikanzniveaus, und begründen Sie in Worten, wer wahrscheinlich recht hat.

5) Folgen, Reihen und Grenzwerte — Total 11,5 P.

Ein Hobbysportler stellt sich einen Trainingsplan zusammen. Dieser ist in drei Teile gegliedert:

Teil I: Die erste Trainingseinheit dauert 15 min. Jede folgende Einheit ist jeweils 3 min länger als die vorangehende, dies so lange bis die Einheit 75 min dauert.

Teil II: 21 Einheiten zu je 75 min.

Teil III: Die erste Einheit dauert 75 min. Anschliessend ist jede Einheit im Vergleich zur vorangehenden jeweils 5 % kürzer, dies so lange bis die Einheit letztmals länger als 15 min dauert.

a) Wie viele Einheiten umfasst der gesamte Trainingsplan? (3,5)

b) Wie gross ist die Gesamtdauer aller Einheiten des ganzen Trainingsplanes? (Angabe in min) (2,5)

c) Das Verkürzen der Einheiten in Teil III könnte theoretisch unendlich oft weitergeführt werden. Diese zusätzlichen Einheiten führt der Hobbysportler aber nicht mehr durch. Auf wie viel Trainingszeit verzichtet er dadurch theoretisch? (Angabe in min) (1,5)

Ein Jahr später verändert er seinen Trainingsplan.

d) Im Teil I möchte er 12 Einheiten absolvieren. Jede Einheit soll wieder um jeweils gleich viele Minuten länger sein als die vorangehende und die letzte Einheit soll wieder 75 min dauern. In diesen 12 Einheiten möchte er insgesamt 10 Stunden trainieren. Wie lange dauert die erste Einheit? (Angabe in min) (1,5)

e) Auch im Teil III möchte er 12 Einheiten absolvieren. Jede Einheit soll immer gleich viele Prozent weniger lang dauern als die vorangehende. Die erste Einheit soll wieder 75 min dauern, die letzte neu exakt 15 min. Wie viele Prozent beträgt die Reduktion von Einheit zu Einheit? (1,5)

Ein Kollege des Hobbysportlers berichtet stolz von seinem eigenen Trainingsplan. Er berechnet die Dauer t_n der n-ten Einheit in Minuten nach der Formel

$$t_n = \frac{244\,n^3 + 125n + 320}{5n^3 + 15n^2 + 25}$$

f) Die Dauer einer Einheit strebt einem Grenzwert zu. Wie gross ist dieser? (1)